ASPECTS OF DEVELOPING A RESEARCH COMPETENCE OF STUDENTS OF PROGRAMME "ACADEMIC BACHELOR OF ENGINEERING" IN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS

N.P. Balabaeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Higher Mathematics
E.A. Enbom, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Higher Mathematics,
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara (Russia)

Abstract. The paper deals with methodological and motivational aspects of developing a research competence of junior students of programme "Academic Bachelor of Engineering" at the technical university. Educational and research projects on mathematical analysis are presented as an example.
Keywords: students' research work; junior students' research projects.

УДК 378

КОНТРПРИМЕРЫ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ IT-НАПРАВЛЕНИЙ

Н.П. Балабаева, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара (Россия)

Аннотация. В работе рассматривается процесс формирования и развития критического мышления студентов, обучающихся по программам бакалавриата IT-направлений, посредством системы задач, связанных с доказательством или опровержением каких-либо утверждений.
Ключевые слова: критическое мышление; методика преподавания высшей математики; примеры и контрпримеры в математике.

В условиях современного общества, интеллектуальная компетентность специалиста в любой области определяется не столько объемом имеющихся у него конкретных знаний, сколько сформированным умением проводить критический анализ поступающей информации, самостоятельно принимать решения на основании этого анализа, выявлять и устранять допущенные ошибки.

В первую очередь это касается специалистов IT-направлений, где используемые технологии и платформы появляются и меняются с такой быстротой, что знания тех или иных технологий утрачивают свою актуальность уже в течение 5-7 лет. Следовательно, в процессе подготовки студентов IT-направлений в техническом вузе особенно важным является формирование умений самостоятельно систематизировать, анализировать и интерпретировать поступающую новую информацию, формулировать и решать проблемы, давать рефлексивную оценку своим действиям. В связи с этим особую актуальность приобрели вопросы развития критического мышления студентов, обучающихся по программам бакалавриата IT-направлений. Процесс преподавания всех предметов и, в частности, высшей математики должен быть нацелен на формирование у студентов качеств, характеризующих критическое мышление, что требует от преподавателя применения специальных образовательных технологий [2].

Под критическим мышлением понимается «вид интеллектуальной деятельности, который характеризуется высоким уровнем восприятия, понимания, объективности подхода к окружающему его информационному полю» [1, стр. 149]. Согласно Е.Н. Волкову, признаками критического мышления являются: оценивающее взвешенное суждение, построение гипотезы, логическое формулирование выводов, аргументация своей позиции на основании определенных критериев.

Для критического мышления характерно использование формализованных моделей и логических правил вывода умозаключений. Основой современного логического и, соответственно, критического мышления является Аристотелева логика с ее бинарной основой «ложь» – «истина» и системой посылок и заключений.

В курсе высшей математики студенты чаще всего встречаются с утверждениями, логическая формализация которых приводит к формуле $\left(\forall x \in X\right)\left(A(x) \to B(x)\right)$.

Доказательство такой теоремы можно проводить либо напрямую (конструктивно), показав истинность импликации $A(x) \to B(x)$ для всех возможных аргументов из соответствующей предметной области, либо методом от противного, выявив истинность импликации $\overline{B}(x) \to \overline{A}(x)$. Для опровержения утверждения достаточно привести контрпример, то есть показать, что $\left(\exists x \in X\right)\left(A(x) \to \overline{B}(x)\right)$.

Эффективным средством формирования и развития критического мышления в процессе математического образования студентов технических вузов является система задач специального вида, требующих доказательства или опровержения некоторых утверждений [3].

Рассмотрим задачу, предлагаемую студентам первого курса в рамках домашней контрольной работы по математическому анализу.

Задача. Верно ли утверждение: «Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема в интервале $\left(a, b\right)$, причем ее предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, то предел производной данной функции $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x) = +\infty$ »?

Приступая к решению этой задачи, студенты, как правило, пытаются представить ситуацию на примере графика конкретной функции. Так как по условию функция дифференцируема на интервале, то она непрерывна на этом интервале и ее графиком является непрерывная кривая, которая в каждой точке $\left(a, b\right)$ имеет касательную, не параллельную оси ординат. С учетом условия $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$, большинство студентов строят график возрастающей на интервале $(a,\,b)$ функции (рис. 1) или функции, строго возрастающей в некоторой левой полуокрестности точки $x=b$ (рис. 2).

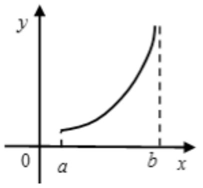

Рис. 1.

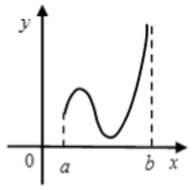

Рис. 2.

Для построенных примеров при $x\to b-0$ угловой коэффициент касательной неограниченно растет, то есть $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)=+\infty$. И на этом основании многие студенты делают вывод, что утверждение верно. Однако попытки аналитического строгого доказательства оказываются безуспешными.

Построим контрпример, опровергающий рассматриваемое утверждение. Для этого нужно найти функцию, удовлетворяющую условиям задачи, но не монотонную на интервале $(a,\,b)$. При этом функция должна иметь бесконечное число точек экстремума в любой левой полуокрестности точки $x=b$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{b-x}+\sin\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)$ (рис. 3).

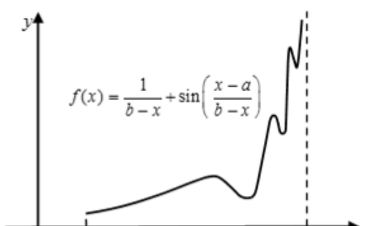

Рис. 3.

Покажем, что она удовлетворяет условиям задачи. Областью существования этой функции является множество $X=(-\infty,b)\cup(b,+\infty)$. Рассматриваемый интервал $(a,\,b)\subset X$, значит, $f(x)$ определена в $(a,\,b)$.

Производная

$$f'(x)=\frac{1}{(b-x)^2}\cdot\left[1+(b-a)\cdot\cos\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]$$

также определена на интервале $(a,\,b)$, то есть функция $f(x)$ дифференцируема в $(a,\,b)$.

Предел функции

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=\lim_{x\to b-0}\left[\frac{1}{b-x}+\sin\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]=+\infty,$$

так как первое слагаемое $\dfrac{1}{b-x}$ есть положительная бесконечно большая величина при $x\to b-0$, а второе слагаемое $\sin\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)$ предела при $x\to b-0$ не имеет, но ограничено в интервале $(a,\,b)$.

Чтобы опровергнуть утверждение, сформулированное в задаче, нужно доказать, что $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)\neq+\infty$. Покажем, что производная $f'(x)$ вообще не имеет предела при $x\to b-0$. Для этого выберем две последовательности значений аргумента $\left\{x_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{x_k^{(2)}\right\}$, сходящиеся к числу b так, чтобы пределы последовательностей соответствующих значений производных $\left\{f'\left(x_k^{(1)}\right)\right\}$ и $\left\{f'\left(x_k^{(2)}\right)\right\}$ не совпадали. Такие последовательности $\left\{x_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{x_k^{(2)}\right\}$ можно построить, зная промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$.

Исследуем функцию $f(x)$ на экстремум. Критических точек, где $f'(x)$ не существует, в интервале $(a,\,b)$ нет. Найдем стационарные точки:

$$f'(x)=\frac{1}{(b-x)^2}\cdot\left[1+(b-a)\cdot\cos\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\right]=0,$$ когда

$$1+(b-a)\cdot\cos\left(\frac{x-a}{b-x}\right)=0,\quad \cos\left(\frac{x-a}{b-x}\right)=-\frac{1}{b-a}=\frac{1}{a-b},$$

$$x=\frac{a+b\cdot\left(\pm\arccos\dfrac{1}{a-b}+2\pi k\right)}{1\pm\arccos\dfrac{1}{a-b}+2\pi k},$$

где $k\in Z$.

Выясним, на каких промежутках функция возрастает: $f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; 1+(b-a)\cdot\cos\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)>0, \;\Leftrightarrow$

$\cos\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)>-\dfrac{1}{b-a}$ (так как $b-a>0$),

$$-\arccos\frac{1}{a-b}+2\pi k<\frac{x-a}{b-x}<\arccos\frac{1}{a-b}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Так как мы рассматриваем $x\in(a,\,b)$, то $b-x>0$. Тогда, выражая x из этого неравенства, получим систему

$$\begin{cases} x\cdot(1+A+2\pi k)<a+b\cdot(A+2\pi k), & (1)\\ x\cdot(1-A+2\pi k)>a+b\cdot(-A+2\pi k), & (2)\end{cases}$$

где $A=\arccos\dfrac{1}{a-b}$.

Так как $A=\arccos\dfrac{1}{a-b}\in[0,\pi]$, то $1+A+2\pi k>0$ $\forall\ k\in Z$, а знак выражения $1-A+2\pi k$ зависит от конкретных значений $\arccos\dfrac{1}{a-b}$ и k.

Из неравенства (1) следует, что

$$x<\frac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k}. \qquad (3)$$

Выясним, при каких значениях k правая часть неравенства (3) принадлежит интервалу (a,b):

$$a<\frac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k}<b\ ,$$

$$a\cdot(1+A+2\pi k)<a+b\cdot(A+2\pi k)<b\cdot(1+A+2\pi k),$$

$$\begin{cases}a+b\cdot(A+2\pi k)<b\cdot(1+A+2\pi k),\\ a+b\cdot(A+2\pi k)>a\cdot(1+A+2\pi k),\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<b,\\ 2\pi k\cdot(b-a)>A\cdot(a-b),\end{cases}$$

$$k>-\frac{A}{2\pi}.$$

Так как $0\le A\le\pi$, то $-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{A}{2\pi}\le 0$. Тогда $k>0$, то есть $k\ge 1$. При этом условии выражение $1-A+2\pi k>0$, и из неравенства (2) следует, что

$$x>\frac{a+b\cdot(-A+2\pi k)}{1-A+2\pi k}. \qquad (4)$$

Найдем $k\in N$, при которых правая часть неравенства (4) принадлежит интервалу (a,b):

$$a<\frac{a+b\cdot(-A+2\pi k)}{1-A+2\pi k}<b$$

$$\begin{cases}a+b\cdot(-A+2\pi k)<b\cdot(1-A+2\pi k),\\ a+b\cdot(-A+2\pi k)>a\cdot(1-A+2\pi k),\end{cases}$$

$$\begin{cases}a<b,\\ 2\pi k\cdot(b-a)>A\cdot(b-a),\end{cases}$$

$$k>\frac{A}{2\pi}.$$

Так как $0\le A\le\pi$, то $0\le\dfrac{A}{2\pi}\le\dfrac{1}{2}$. Тогда $k>\dfrac{1}{2}$, то есть $k\ge 1$.

Итак, при $k\ge 1$ одновременно выполняются неравенства (1) и (2), следовательно, $\dfrac{a+b\cdot(-A+2\pi k)}{1-A+2\pi k}<x<\dfrac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k}$.

Таким образом, в интервале (a,b) функция $f(x)$ строго возрастает на всех промежутках вида $\left[\dfrac{a+b\cdot(-A+2\pi k)}{1-A+2\pi k},\ \dfrac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k}\right]$, где $k\in N$, $A=\arccos\dfrac{1}{a-b}$.

Аналогично можно показать, что функция $f(x)$ строго убывает на всех промежутках вида $\left[\dfrac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k},\ \dfrac{a+b\cdot(2\pi-A+2\pi k)}{1+2\pi-A+2\pi k}\right]$, $k\in N$.

Рассмотрим последовательность точек $\left\{x_k^{(1)}\right\}$ из интервала (a,b), где все $x_k^{(1)}$ – внутренние точки промежутков возрастания функции $f(x)$. Для определенности выберем середины соответствующих отрезков:

$$x_k^{(1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b\cdot(-A+2\pi k)}{1-A+2\pi k}+\frac{a+b\cdot(A+2\pi k)}{1+A+2\pi k}\right),$$

$$x_k^{(1)}=\frac{4\pi^2 b\cdot k^2+2\pi(a+b)\cdot k+a+b-A^2 b}{4\pi^2\cdot k^2+4\pi\cdot k+1-A^2},\ k\in N.$$

$$\lim_{k\to+\infty}x_k^{(1)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{4\pi^2 b\cdot k^2+2\pi(a+b)\cdot k+a+b-A^2 b}{4\pi^2\cdot k^2+4\pi\cdot k+1-A^2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{k\to+\infty}\frac{4\pi^2 b+\dfrac{2\pi(a+b)}{k}+\dfrac{a+b-A^2 b}{k^2}}{4\pi^2+\dfrac{4\pi}{k}+\dfrac{1-A^2}{k^2}}=b,$$

значит, последовательность $\left\{x_k^{(1)}\right\}$ сходится к числу b. Найдем предел последовательности соответствующих значений производных $\left\{f'\left(x_k^{(1)}\right)\right\}$: $\lim\limits_{k\to+\infty}f'\left(x_k^{(1)}\right)=$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\left(b-x_k^{(1)}\right)^2}\cdot\left[1+(b-a)\cdot\cos\left(\frac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)\right].$$

Так как $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k^{(1)}=b$, то $=\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{\left(b-x_k^{(1)}\right)^2}=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}=+\infty$. Значит, $\lim\limits_{k\to+\infty}\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)$ не существует. Но все точки $x_k^{(1)}$ выбраны так, что $1+(b-a)\cdot\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)>0$. Учитывая, что $\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)\le 1$ $\forall\ k\in N$, получим $0<1+(b-a)\cdot\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)\le 1+b-a$, то есть функция $1+(b-a)\cdot\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)}-a}{b-x_k^{(1)}}\right)$ ограничена и не обращается в ноль $\forall\ k \in N$.

Тогда $f'\left(x_k^{(1)}\right) = \dfrac{1}{\left(b - x_k^{(1)}\right)^2} \cdot \left[1 + (b-a)\cdot\cos\left(\dfrac{x_k^{(1)} - a}{b - x_k^{(1)}}\right)\right]$

есть бесконечно большая величина как произведение бесконечно большой функции на функцию ограниченную, не равную нулю. С учетом знаков обоих множителей, получим $\lim\limits_{k\to+\infty} f'\left(x_k^{(1)}\right) = +\infty$.

Рассмотрим теперь другую последовательность точек $\left\{x_k^{(2)}\right\}$ из интервала (a, b), выбирая точки, в которых функция $f(x)$ имеет максимум, то есть

$$x_k^{(1)} = \frac{a + b\cdot(A + 2\pi k)}{1 + A + 2\pi k},\ k \in N.$$

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^{(2)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi b\cdot k + a + Ab}{2\pi\cdot k + 1 + A} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi b + \dfrac{a + Ab}{k}}{2\pi + \dfrac{1+A}{k}} = b,$$

значит, последовательность $\left\{x_k^{(2)}\right\}$ сходится к числу b. Найдем предел последовательности соответствующих значений производных $\left\{f'\left(x_k^{(2)}\right)\right\}$. По условию выбора точек $x_k^{(2)}$, $f'\left(x_k^{(2)}\right) = 0 \quad \forall\ k \in N$. Значит, $\lim\limits_{k\to+\infty} f'\left(x_k^{(1)}\right) = 0$.

Таким образом, нашлись две последовательности значений аргумента $\left\{x_k^{(1)}\right\}$ и $\left\{x_k^{(2)}\right\}$, сходящиеся к числу b, такие, что пределы последовательностей соответствующих значений производных $\left\{f'\left(x_k^{(1)}\right)\right\}$ и $\left\{f'\left(x_k^{(2)}\right)\right\}$ различны. Следовательно, определение предела функции по Гейне не выполняется, а это означает, что $f'(x)$ при $x \to b-0$ предела не имеет.

Итак, построена функция $f(x) = \dfrac{1}{b-x} + \sin\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)$, которая определена и дифференцируема в интервале (a, b), имеет предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, но при этом $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x) \neq +\infty$. Следовательно, приведенное в условии задачи утверждение не верно.

Умение находить примеры, иллюстрирующие понятия и теоремы, и контрпримеры, опровергающие утверждения, является важным качеством критического мышления. Целенаправленное обучение студентов основным логическим приемам, формирование потребности и даже привычки к поиску необходимых примеров и контрпримеров, позволяет преодолеть формализм в изучении высшей математики, повысить гибкость и быстроту мышления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айкина Т.Ю. Развитие критического мышления студентов технических специальностей в рамках дисциплины «Английский язык» // Вестник ТГПУ. 2014. № 4(145). С. 149-151.
2. Балабаева Н.П., Энбом Е.А. Формирование критически-рефлексивного мышления бакалавров инженерного профиля в процессе изучения курса высшей математики. // Сборник научных трудов SWorld. 2013. Выпуск 3. Том 18. С. 49-53.
3. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа. М.: Высшая школа, 2007. 544 с.

COUNTEREXAMPLES IN THE COURSE OF HIGHER MATHEMATICS AS A MEANS OF DEVELOPING CRITICAL THINKING OF IT-STUDENTS

N.P. Balabaeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Higher Mathematics
Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara (Russia)

Abstract. The author considers the process of developing critical thinking of students enrolled in IT programs through a system of tasks aimed at proving or disproving some claims.

Keywords: critical thinking; teaching methodology of higher mathematics; examples and counterexamples in mathematics.